c) Donner la forme algébrique de $\frac{w-z_A}{a-z_A}$. En déduire une *A*, *C* et *D* sont alignés.

d) Construire alors le point *D*.

EXERCICE N°4 : 15' 3 points

A/ On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $\frac{1}{4}z^2 - \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}z - i = 0$.

1) Vérifier que : $z_1 = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est une solution de l'équation (E).

2) Déterminer alors l'autre solution z_2 de l'équation (E) puis vérifier que : $z_2 = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

B/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. (Unité graphique **2cm**)

Soit A le point d'affixe $z_A = 2+2i$ et Γ le cercle de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$.

1) Montrer que : $Z_H = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_k = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) A tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{-4}{z}$.

a) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $OM \times OM' = 4$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \pi - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$.

3) Soient $z_{H'}$ et $z_{K'}$ les affixes respectives de H' et K' tels que : $z_{H'} = \frac{-4}{z_H}$ et $z_{K'} = \frac{-4}{z_K}$.

a) Montrer que $Z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $Z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Construire les points H' et K'. (Justifier).

EXERCICE N°5 : 20' 4 points

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + \alpha z^2 - \overline{\alpha} z - 1 = 0$; $\left(\alpha \in \mathbb{C}^*\right)$.

1) a) Montrer que si z_0, z_1 et z_2 sont les solutions de (E) alors $z_0 . z_1 . z_2 = 1$.

b) Montrer que si z est une solution de (E) alors $\frac{1}{\overline{z}}$ est aussi une solution de (E).

c) En déduire que (E) admet au moins une solution de module 1.

2) On suppose que $|\alpha| = 1$. **a)** Vérifier que $(-\alpha)$ est une solution de (E).

b) Soit θ un argument de α. Déterminer les autres solutions de (E) en fonction de θ.

3) Utiliser ce qui précède pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^3 + \left(1+i\sqrt{3}\right)z^2 - \left(1-i\sqrt{3}\right)z - 2 = 0$.

Qarray.tn Aqra Blech- Qarray.tn